代数幾何学シンポジウム記録
1998年度 pp.17-19

Jacobi 形式と Gromov-Witten 不変量

河合 俊哉 (京都大学数理解析研究所)

X を単連結な Calabi-Yau threefold とする。X に対する、種数 g の Gromov-Witten 不変量の生成関数を種数 g の Gromov-Witten potential と呼び、

$$F_g = F_g(t_1, \ldots, t_l)$$

で表わす。但し、$l = h^{11}(X)$ であり、$t_1, \ldots, t_l$ は (複素化された) Kähler 変数である。さらに、

$$Z = \exp(\sum_{g=0}^{\infty} x^{2g-2} F_g)$$

により弦分配関数 Z を導入することにする。

一般に F_g ないし Z を具体的に求めることは難しい。そこで、X が elliptic fibration と K3 fibration を同時に許すような、特殊な状況を考える。このとき K3 fibration としての generic fiber は楕円 $K3$ である。更に elliptic fibration の底が Hirzebrusch 曲面になる場合を以下では主に想定する。この様な fiber 構造を許す Calabi-Yau threefold は弦理論における双対性において重要な役割を果していることを注意しておく。

上記のような条件のもとで考えたいのは、次のような予想である。

> "F_g は特定の極限において、ある正定値格子に対する重さ $2g-2$ の (準) Jacobi 形式 の lifting により表せる。"

また弦分配関数に関しては、

> "Z は、特定の極限において、ある Lorentzian 格子に対する重さ 0 の Jacobi 形式 の 指数 lifting により表せ、結果として、Borcherds 的な無限積表示を有する。"

と言う予想である。ここで「特定の極限」とは、直感的に言うと、考えている Calabi-Yau threefold の K3 fibration としての底である有理曲線の「大きさ」が無限大になる極限である。適当に座標を取るとこの極限は $q_1 := e^{t_1} \to 0$ と表すことができる。また、 lifting とは保型形式に対する Fourier-Jacobi 展開の逆として通常正の重さの Jacobi 形式に対して導入される Maaß 型 lifting の拡張で、Hecke 作用素を使って定義されるものである。

上の曖昧な表現でお気付きの通り、予想と言っても、まだ well-formed ではない。ある種の条件を見たす Jacobi 形式が付与されたときにそれをタネにして、一

定の手続きで、Gromov-Witten potential あるいは弦分配関数の候補となる表式を作る。(この過程は Calabi-Yau threefold の Gromov-Witten 不変量という幾何学的対象とは独立である。) 元の Jacobi 形式と Calabi-Yau threefold のうまい組み合わせを選べばこの候補が実際に本物であることを期待する訳であるが、このストーリーがうまく行くためには必要条件として Calabi-Yau threefold が elliptic fibration と K3 fibration を同時に許さなければいけないことがわかる。しかし、一般的に Calabi-Yau threefold と Jacobi 形式の組み合わせをどう選ぶべきかという点に関しては、未だ良い予想すら持ち合わせておらず、いくつかの例で実験してみているというのが現状であることは断わっておく。

上に述べた予想の詳細ならびに詳しい参考文献に関しては拙論 [1] (種数 0、1 の場合) および特に現在準備中の [2] を見て頂ければ幸いである。

少し雰囲気を理解して頂くために、弦分配関数に関する無限積表示予想を概説しておく。今、K3 fibration の generic fiber の Picard 格子の monodromy 不変な部分格子が $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\oplus Q^\vee(-m)$ で与えられると仮定する。ここに、m は正の整数、$Q^\vee$ はある単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の coroot 格子 である。予想で述べた Lorentzian 格子に対する重さ 0 の Jacobi 形式 とは

$$\Phi_0(\tau,z,w)=\frac{\Psi_{10,m}(\tau,z)}{\chi_{10,1}(\tau,w)}$$

という形をしている。ここで $\Psi_{10,m}$ は $\mathfrak{g}$ に対する重さ 10、指数 m の Weyl 不変な Jacobi 形式であって、$\Psi_{10,m}(\tau,0)=-2E_4(\tau)E_6(\tau)$ を満すものである。$\chi_{10,1}$ は有名な井草による重さ 10 の Siegel 尖点形式 $\chi_{10}(\Omega)$ ($\Omega\in\mathbb{H}_2$) の Fourier-Jacobi 展開の最初の係数として出てくる Jacobi 形式で、具体的には $\chi_{10,1}(\tau,w)=\Delta(\tau)K(\tau,w)^2$ と表せる。但し、$\Delta(\tau)=\eta(\tau)^{24}$ および $K(\tau,w)=i\vartheta_1(\tau,w)/\eta(\tau)^3$ である。なお、$x=2\pi w$ という関係になっている。今、$q=e^{2\pi i\tau}$、$\zeta^\gamma=\exp(2\pi i(\gamma,z))$、$y=e^{2\pi iw}$ と置いて

$$\Phi_0(\tau,z,w)=\sum_{n,\gamma,j}D(n,\gamma,j)q^n\zeta^\gamma y^j$$

と Fourier 展開する。Kähler 変数 $t_1,\ldots,t_l$ は適当な線形変換ののちに $\log u$, $\log p$, $\log q$, $\log\zeta$ で表せ、このとき $\log u$ は t_1 の表式にのみ現れるとする。弦分配関数が

$$Z=\exp\left(x^{-2}F_0^{(0)}+F_1^{(0)}\right)\prod_{(\ell,n,\gamma,j)>0}(1-p^\ell q^n\zeta^\gamma y^j)^{D(\ell n,\gamma,j)}+O(q_1)$$

と表せるというのが予想である。但し、$F_0^{(0)}$ $F_1^{(0)}$ は定数項を除けば、それぞれ $\log u$, $\log p$, $\log q$, $\log\zeta$ の 三次および一次の斎次多項式であって、ここでは、その具体的な表式を与えないが、$\Phi_0(\tau,z,w)$ のデータから決定できる。また $(\ell,n,\gamma,j)>0$ の意味は四つ組 (ℓ,n,γ,j) には 正負の概念を導入できることによる。

この無限積の表式は、Borcherds の仕事を想起させる。違いは Borcherds は、重さ 0 の正定値格子に対する Jacobi 形式をタネにしたのに対し、ここでは、重さ 0 の Lorentzian 格子に対する Jacobi 形式をタネにしている点である。Borcherds

の無限積は Weyl(-Kac) の分母を拡張したものとみなすのが、一つの解釈であるが、ここでも、そのアナロジーを使うならば、$x^{-2}F_0^{(0)}+F_1^{(0)}$ が、Weyl vector に相当する。

弦分配関数の無限積表式は色々なことを夢想させるが、それらは然るべき発展があってから、述べるのが適当であるかと思う。

最後に、門外漢の私に伝統ある城ノ崎・代数幾何学シンポジウムに参加する機会を与えてくださった、オーガナイザーに感謝致します。

References

[1] T. Kawai, *String duality and enumeration of curves by Jacobi forms*, hep-th/9804014.

[2] T. Kawai, *String partition functions and infinite products*, in preparation.